Einige Sätze über Primzahlen
und spezielle binomische Ausdrücke

Hans Walther Ernst Gerhart Schmidt

12.05.2014

Zweite Fassung 19.08.2015

Hauptstraße 33, D-04668 Otterwisch, Germany

hws@schmidt-guetter.de

Schlüsselwörter: Primzahlen, Gauß-Legendre-Theorem, Goldbach, Lücken, Vierlinge, Zwillinge

Abstract

1. There is no existing any quadratic interval $\eta_n := (n^2, (n+1)^2]$, which contains less than 2 prime numbers.
The number of prime numbers within η_n goes averagely linear with n to infinity.
2. The exact law of the number $\pi(n)$ of prime numbers smaller or equal to n is given. As an approximation of that we get the prime number theorem of Gauss for great values of n.
3. We derive partition laws for $\pi(\eta_n)$, for the number of twin primes $\pi_2(\eta_n)$ in quadratic intervals η_n and for the multiplicity $\pi_g(2n)$ of representations of Goldbach-pairs for a given even number 2n similiar to the theorem of Gauss.
4. There is no natural number n>7, which is beginning point of a prime number free interval with a length of more than 2*SQRT(n).
5. It follows, that the number of twin primes goes to infinity as well as the number of Goldbach-pairs for a given 2n, if n goes to infinity.
6. Besides this our computation gives a new proof for the prime number theorem of Gauss.

1 Einleitung

Durch die Fach- und sogar Tagespresse huschen in den letzten Jahren gelegentlich neue Rekordmeldungen über Primzahlen, wie etwa: "...neue, bisher größte Primzahl gefunden mit Hilfe eines Supercomputers..." oder: "...bisher größter Primzahlzwilling entdeckt...". Solche Aussagen haben geringen wissenschaftlichen Wert, da sie im allgemeinen keine Informationen über verwendete Entscheidungsalgorithmen enthalten. Auch stellen sie keine Hilfe zur Entscheidung der Fragen dar, ob die Menge der Primzahlzwillinge, der Fermat'schen oder Mersenneschen Primzahlen endlich ist oder nicht. Nachfolgend soll gezeigt werden:

1. Es wird eine exakte Formel angegeben zur Berechnung der Anzahl $\pi(x)$ von Primzahlen $\leq x$, aus der sich der Primzahlsatz von Gauß und Legendre als Näherung für große x ergibt.

2. Da auch analoge Gesetze für die Anzahlen $\pi(\eta_n)$ von Primzahlen in Quadratintervallen $\eta_n := (n^2, (n+1)^2]$, für die Anzahl von Primzahlzwillingen $\pi_2(\eta_n)$ und die Vielfachheit von Goldbachpaar-Darstellungen $\pi_g(2n)$ für eine vorgelegte gerade Zahl 2n ableitbar sind, kann gezeigt werden, daß alle diese Größen für $n \to \infty$ über alle Grenzen wachsen. Solches gilt vermutlich sogar für Primzahlvierlinge in biquadratischen Intervallen oberhalb eines Schwellwertes.

Zuerst sollen im 2. Kapitel einige allgemein bekannte Beziehungen über die Teilbarkeit von Binomina der Form $z_\pm = 2^x \pm 1$ zusammengestellt werden. Die Kapitel 3 und 4 der ersten Fassung dieses Artikels sind gegenstandslos geworden. Das 5. Kapitel liefert eine exakte Darstellung für $\pi(x)$, woraus der Gauß'sche Primzahlsatz als Näherung

abgeleitet wird, und die Primzahlverteilung über Quadratintervallen. Im 6. Kapitel wird eine obere Schranke für die maximale Länge des einer natürlichen Zahl n folgenden primzahlfreien Intervalls angegeben. Im 7., 8. und 9. Kapitel folgen die Anwendungen auf $\pi_2(\eta_n)$, die Vierlingsanzahl $\pi_4\left(n^4\right)$ und $\pi_g(2n)$. Die abgeleiteten Streubreiten der π-Funktionen werden im Anfangsbereich mit numerisch-experimentellen Befunden verglichen.

2 Teilbarkeitsbeziehungen für Binomina der Form $\mathbf{z_\pm = 2^x \pm 1}$

Satz 2.1. Jede natürliche Zahl $a < \infty$, $a \epsilon \mathbb{N}$, hat die kanonische Primfaktorzerlegung

$$a = \prod_{i=1}^{n_0} p_i^{n_i}, \tag{1}$$

n_0= Anzahl der von einander verschiedenen Primfaktoren, n_i ihre jeweilige Vielfachheit, oder

$$a = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{n_i} \tag{2}$$

unter Verwendung aller Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge, worin alle $n_i = 0$ erfüllen, die nicht in (1) auftreten. Faßt man hierin alle ungeraden Primfaktoren in

$$m = \prod_{i=2}^{n_0} p_i^{n_i}$$

zusammen, so ergibt sich $a = 2^{n_1}m$. Für $n_1 = 0$ ist $a = m$ ungerade. Jede ungerade Zahl m hat auch eine Darstellung

$$m = 1 + 2^{n_1^{'}} m^{'}\ ,\ n_1^{'} \geq 1. \tag{3}$$

Satz 2.2. Die Summe m aus zwei beliebigen natürlichen Zahlen ist genau dann eine ungerade Zahl ($n_1 = 0$), wenn genau einer der Summanden ungerade ist:

$$s = a_1 + a_2 = 2^{n_1} m_1 + 2^0 m_2 = m. \tag{4}$$

Das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen $a_1 a_2$ kann nur ungerade sein, wenn $a_1$und a_2 ungerade sind.

Satz 2.3. Aus dem allgemeinen Binomischen Satz

$$(a+b)^m = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} a^{m-\nu} b^{\nu} \tag{5}$$

ergibt sich für a=b=1 und m=ungerade natürliche Zahl

$$(1+1)^m = 2^m = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} = 2\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{\nu}\right) \tag{6}$$

weil $\binom{m}{\nu} = \binom{m}{m-\nu}$ gilt. Für eine gerade Zahl $m = 2l$ ergibt sich

$$2^m = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} = 2\left(1 + \sum_{\nu=1}^{l-1} \binom{m}{\nu}\right) + \binom{m}{\frac{m}{2}} = 2\left(1 + \sum_{\nu=1}^{l-1} \binom{2l}{\nu} + B\right) \tag{7}$$

mit dem binomischen Koeffizienten

$$2B = 2B_{2l-1,l-1} = B_{2l,l} = \binom{2l}{l} = \binom{m}{\frac{m}{2}}.$$

Wählt man eine ungerade Primzahl $p \geq 3$ für m, so gilt außer $B_{m,\nu} = \binom{m}{\nu} = B_{m-\nu,\nu} = \binom{m-\nu}{\nu}$, daß in jedem Binomialkoeffizienten mit $0 < \nu < m$ der größte Faktor im Zähler gleich p ist, also ausgeklammert werden kann, da er als Primzahl gegen keinen Nennerfaktor, die alle kleiner sind, zu kürzen ist:

$$2^p = 2\left(1 + pM\right)\ ,\ \ M = \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{\nu}\ \text{, ganzzahlig,} \tag{8}$$

oder

$$2^p - 1 = 1 + 2pM \tag{9}$$

sowie

$$2^p + 1 = 3 + 2pM\ . \tag{10}$$

Aus (9) folgt $2^{p-1} - 1 = pM = 3pM^{'}$ nach (18), sodaß (10) auch als $2^p + 1 = 3\left(1 + 2pM^{'}\right)$ geschrieben werden kann. Stets gilt dann $2^p - 1 \equiv 1 mod 3$, $2^p + 1 \equiv 0 mod 3$.

Satz 2.4. Sei $p > 2$ eine Primzahl, $m > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Dann gelten mit $N_{\pm} > 1$

$$2^{pm} - 1 = \left(2^p - 1\right) N_{-}\ , \tag{11}$$

$$2^{pm} + 1 = \left(2^p + 1\right) N_{+}\ . \tag{12}$$

Bew.: Man wähle in Satz 2.3. für m ein $m^{'} = pm$. Mit den Abkürzungen $L = 2^p - 1$, $M = 2^p + 1$ kann geschrieben werden

$$2^{pm} - 1 = (L+1)^m - 1 = \sum_{\nu=0}^{m} B_{m,\nu} L^{m-\nu} - 1 = LN_{-}$$

mit $N_{-} = \sum_{\nu=0}^{m-1} B_{m,\nu} L^{m-1-\nu} > 1$. Analog folgt mit $N_{+} = \sum_{\nu=0}^{m-1} B_{m,\nu} \left(-1\right)^{\nu} M^{m-1-\nu}$ sodann $2^{pm} + 1 = (M-1)^m + 1 = \sum_{\nu=0}^{m-1} B_{m,\nu} \left(-1\right)^{\nu} M^{m-\nu} = MN_{+}$, **q.e.d.**

Bemerkung 2.4.1. Es gilt Satz 2.4. für jeden Teiler p_i von $m^{'} = a$ nach (1). Daraus folgt aber

$$2^{m^{'}} \pm 1 = N_{i,\pm} \prod_{i=1}^{n_0} (2^{p_i} \pm 1) \tag{13}$$

nur, wenn Teilerfremdheit $(2^{p_i} \pm 1) \nmid (2^{p_j} \pm 1) \, \forall i, j \leq n_0$ gezeigt ist. Andernfalls tritt ein Teiler $p_k \backslash (2^{p_i} \pm 1)$ im Ausdruck für $2^{m^{'}} \pm 1$ nur höchstens in der Potenz auf, in der er in einem der Teilerbinomina vorkommt: $p_k^{n_k} \backslash (2^{p_i} \pm 1)$. Das Beispiel $2^{3 \cdot 11} + 1 = 3^2 \cdot 67 \cdot 683 \cdot 20857 \neq (2^3 + 1)(2^{11} + 1) N_+ = (3^2)(3 \cdot 683) N_+$ zeigt, daß der Faktor $p_k = 3$ nicht in 3., sondern nur in 2. Potenz in der Faktorisierung auftritt.

Bemerkung 2.4.2. Während (11) auch für $p_1 = 2$ gilt, ist dies bei (12) nicht der Fall, was aus dem folgenden Satz hervorgeht.

Satz 2.5. . Seien i, m natürliche Zahlen, $m > 1$ ungerade. Dann gilt $\forall i, m$ mit den Fermat-Zahlen $F_\nu = \left(2^{(2^\nu)} + 1\right)$ und $M_\nu > 1$, ungerade,

$$2^{m2^i} - 1 = (2^m - 1) \prod_{\nu=0}^{i-1} F_\nu M_\nu \, , \tag{14}$$

$$2^{m2^i} + 1 = F_i M_i \tag{15}$$

mit $M_i > 1$; nur für $m = 1$ folgt $M_i = 1$. Dabei kann $(2^m - 1)$ noch nach Satz 2.4. weiter aufgespaltet werden. Falls $m = p_j m^{'}$ gilt, kann etwas allgemeiner statt (15) geschrieben werden:

$$2^{m2^i} + 1 = \left(2^{m^{'}2^i} + 1\right) M_i^{'} = \left(2^{p_j 2^i} + 1\right) M_i^{''}. \tag{16}$$

Bemerkung 2.5.1.: Wegen $2^0 = 1$ gilt $\forall m$ ungerade

$$2^m + 1 = 2^{m2^0} + 1 = 3M_0. \tag{17}$$

Weil für jede gerade Zahl g gilt

$$2^g - 1 = \left(2^{g/2} + 1\right)\left(2^{g/2} - 1\right) \ , \tag{18}$$

folgt $3 \backslash (2^g - 1) \ \forall g$.

Bew.: ad (15) :

$$\begin{aligned} 2^{m2^i} + 1 &= \left[2^{\left(2^i\right)} + 1 - 1\right]^m + 1 = 1 + \sum_{\nu=0}^{m} B_{m,\nu} \left(-1\right)^\nu \left[2^{\left(2^i\right)} + 1\right]^{m-\nu} \\ &= F_i M_i \text{ mit } M_i = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(-1\right)^\nu B_{m,\nu} F_i^{m-1-\nu}. \end{aligned}$$

(16) ergibt sich analog, indem im ersten Schritt nur $[\cdots]^{m'}$ oder $[\cdots]^{p}$ gebildet wird. Für $m > 1$ folgt stets $M_i > 1$ wegen

$$2^{m2^i} + 1 = \left[2^{\left(2^i\right)}\right]^m + 1 > 2^{\left(2^i\right)} + 1.$$

ad (14):

$$\begin{aligned} 2^{m2^i} - 1 &= \left(2^{m2^{i-1}} + 1\right)\left(2^{m2^{i-1}} - 1\right) = \cdots \\ &= \left(2^m - 1\right)\prod_{\nu=0}^{i-1}\left(2^{m2^\nu} + 1\right) = \left(2^m - 1\right)\prod_{\nu=0}^{i-1} F_\nu M_\nu . \end{aligned}$$

Hierin tritt das Produkt aller Fermat-Zahlen mit $\nu = 0\,(1)\,i-1$ auf, weil jede Fermat-Zahl F_i teilerfremd ist zu allen F_ν mit $\nu < i$ (siehe folgender Satz); **q.e.d.**

Satz 2.6. Folgende Ausdrücke sind zueinander teilerfremd: a)

$$\left(2^i - 1\right) \nmid \left(2^i + 1\right) \text{ für festes i,} \tag{19}$$

b) die Fermatzahlen

$$F_i \nmid F_j \;\forall j < i. \tag{20}$$

Bew.: ad a) Wegen $(2^i + 1) - (2^i - 1) = 2$ ist der größte gemeinsame Teiler ≤ 2. Da $\forall i > 1$ gilt $2^i \pm 1 \geqslant 3$ ungerade, kann nur eine ungerade Zahl $\geqslant 3$ gemeinsamer Teiler sein. Die Menge der gemeinsamen Teiler ist also leer, es gilt a).

ad b) Es ist $F_{i-1}\left(F_{i-1} - 2\right) = \left(2^{\left(2^{i-1}\right)} + 1\right)\left(2^{\left(2^{i-1}\right)} - 1\right) = 2^{\left(2^i\right)} - 1 = F_i - 2$. Dann folgt $F_{i-1} = \frac{F_i - 2}{F_{i-1} - 2}$ und $\prod_{\nu=0}^{i-1} F_\nu = \frac{F_i - 2}{F_{i-1} - 2} \cdot \frac{F_{i-1} - 2}{F_{i-2} - 2} \cdot \ldots \cdot \frac{F_1 - 2}{F_0 - 2} = F_i - 2$ nach Kürzung, da $F_0 - 2 = 1$, also gilt b) ; **q.e.d.**

Aus dem bisher Ausgeführten geht hervor, daß als Primzahlanwärter nur die Mersenne-Zahlen $M_p = 2^p - 1$ und die Fermat-Zahlen $F_i = 2^{\left(2^i\right)} + 1$ in Betracht kommen. Alle anderen $z_\pm = (2^x \pm 1)$ sind als teilbar erwiesen. Es wäre daher wünschenswert, die Primzahl-Anwärterzahlen aufgrund von Exponenteneigenschaften allein in prime und teilbare Zahlen klassifizieren zu können, zumal unter den Anwärtern nur wenige echte Primzahlen enthalten sind.

Eine weitere Klasse teilbarer Zahlen definiert

Satz 2.7. Es sei gemäß der kanonischen Primzahlzerlegung (1) $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i} = m2^{\alpha_1}$ mit $m > 1$, ungerade, und $p' = 2n + 1 > 3$ eine ungerade Primzahl. Dann gilt

$$p' \setminus (2^n - 1) \text{ ,wenn } n \; mod \; 4 \equiv 0, \text{ d.h. } \alpha_1 \geq 2, \tag{21}$$

$$p' \setminus (2^n - 1) \text{ ,wenn } n = m = p, \; m \equiv -1 \; mod \; 4, \text{ d.h. } \alpha_1 = 0, \tag{22}$$

$$p' \setminus (2^n + 1) \text{ ,wenn } n = m = p, \; m \equiv +1 \; mod \; 4, \text{ d.h. } \alpha_1 = 0, \tag{23}$$

$$p^{'} \backslash \left(2^n + 1\right) \text{ ,wenn } n \; mod \; 4 \equiv 2, \text{ d.h. } \alpha_1 = 1. \tag{24}$$

Bemerkung 2.7.1: Insbesondere impliziert (22) für $\frac{p^{'}-1}{2} = n = m = p \equiv -1 mod 4$ die Teilbarkeit der Mersennezahl M_p, also

$$p^{'} \backslash \left(2^p - 1\right) \tag{25}$$

sowie (23) für $\frac{p^{'}-1}{2} = n = m = p \equiv +1 mod 4$, daß

$$p^{'} \backslash \left(2^p + 1\right) \tag{26}$$

gilt. (Den Beweis, daß $p^{'} \backslash \left(2^p - 1\right)$ gilt, g.d.w. $p^{'} = 2p + 1$ und $p \equiv 3 mod 4$ gilt, s. [1], p.174, Satz 21 mittels quadratischen Kongruenzen.)

Bemerkung 2.7.2. Ist $n = p_i m \equiv \pm 1 mod 4$, so folgt unter Berücksichtigung von (11), (12)

$$2^n \pm 1 = p^{'} N_{\pm} = \left(2^{p_i} \pm 1\right) N_{i,\pm}. \tag{27}$$

Ob darin $p^{'} \backslash \left(2^{p_i} \pm 1\right)$ gilt oder $p^{'} \backslash N_{i,\pm}$, bleibt zunächst offen.

Bew.: Mit $p^{'}$ statt p in (9) folgt unter Beachtung der Bemerkung zu Satz 2.5. und mit $p^{'} - 1 = 2n = m 2^{1+\alpha}$

$$2^{p^{'}-1} - 1 = p^{'} M = 3 p^{'} M^{'} = 2^{2n} - 1 = \left(2^n + 1\right)\left(2^n - 1\right), \tag{28}$$

$n = \frac{p^{'}-1}{2} = m 2^{\alpha}$. Darin ist stets

$$2^n + 1 = 2^{m 2^{\alpha}} + 1 = F_{\alpha} M_{\alpha} \tag{29}$$

nichtprim mit $F_{\alpha} = \left(2^{(2^{\alpha})} + 1\right)$, $M_{\alpha} > 1 \forall m > 1$; nur für $m = 1$ ist $M_{\alpha} = 1$ und F_{α} Primzahlanwärter; sowie

$$2^n - 1 = 2^{m 2^{\alpha}} - 1 = \left(2^m - 1\right) \prod_{\nu=0}^{\alpha-1} \left(2^{m 2^{\nu}} + 1\right) = \left(2^m - 1\right) \prod_{\nu=0}^{\alpha-1} F_{\nu} M_{\nu}. \tag{30}$$

Die Folge der Fermat'schen Primzahlen beginnt mit

$$\{F_{\nu}\} = \{3, 5, 17, 257, 65537, \ldots\}. \tag{31}$$

Ist m teilbar, etwa $p_j \backslash m$, so gilt zusätzlich $\left(2^m - 1\right) = \left(2^{p_j} - 1\right) N_{j-}$ nichtprim.

a) Zuerst sei $\alpha = 0$ angenommen. Dann ist $n = m \geq 3$ und $p^{'} = 1 + 2m$. Mithin gilt für $m \; mod \; 8 \equiv 1 \; oder \; 5$ (d.h. $m \; mod \; 4 \equiv 1$), daß $p^{'} \equiv 3 \; mod \; 8$ und für $m \; mod \; 8 \equiv 3 \; oder \; 7$ (d.h. $m \; mod \; 4 \equiv -1$), daß $p^{'} \equiv 7 \; mod \; 8$. Es sei nun $m = p$ als Primzahl angenommen und

1.) $p^{'} = 1 + 2p \equiv 3 \; mod \; 8$, also $p \; mod \; 8 \equiv 1 \; oder \; 5$, d.h. $p \; mod \; 4 \equiv 1$. Nimmt man weiter unter dieser Voraussetzung an, daß $p^{'} \backslash \left(2^p - 1\right)$ gilt, so folgt hieraus unter Beachtung von (9), (10), (17), (18), $2^p - 1 = 1 + 2 \cdot 3 p M_1^{'} \equiv 7 \; mod \; 8$ und weiter

$2^{p-1}-1 = 3pM_1^{'} \equiv 7\ mod\ 8$, also $pM_1^{'} \equiv 5\ mod\ 8$, sowie $2^p+1 = 3\left(1+2pM_1^{'}\right) \equiv 1\ mod\ 8$ und weiter $1+2pM_1^{'} \equiv 3\ mod\ 8$, also $pM_1^{'} \equiv 1\ mod\ 8$ im Widerspruch zur vorigen Zeile. Mithin ist die Annahme $p^{'} \backslash (2^p-1)$ falsch. Da die Annahme $\left(3p^{'}\right) \backslash (2^p+1)$ wegen $3p^{'} \equiv 1\ mod\ 8$ keinen Widerspruch liefert, ist (23) bewiesen für $m = p$.

2.)Sei $p^{'} = 1+2p \equiv 7\ mod\ 8$, also $p\ mod\ 8 \equiv 3\ oder\ 7$ bzw. $p\ mod\ 4 \equiv -1$. Sei weiter angenommen, daß $p^{'} \backslash (2^p+1)$ gilt, so folgt daraus $2^p+1 = 3+2\cdot 3pM_1^{'} \equiv 1\ mod\ 8$, also $2^{p-1}-1 = 3pM_1^{'} \equiv 7\ mod\ 8$, also $pM_1^{'} \equiv 5\ mod\ 8$. Andererseits folgt aus $2^p+1 = 3\left(1+2pM_1^{'}\right) \equiv 1\ mod\ 8$, also $1+2pM_1^{'} \equiv 3\ mod\ 8$, der Widerspruch $pM_1^{'} \equiv 1\ mod\ 8$. Daher gilt (22) für $m = p$.

b) Im Falle $\alpha = 1$ gilt $p^{'} = 1+m2^{1+\alpha} = 1+4m \equiv 5\ mod\ 8\ \forall m$, $n = \frac{p^{'}-1}{2} = 2m$ und wegen $2^{4m}-1 = (2^{2m}+1)(2^{2m}-1) = p^{'}M = 3p^{'}M^{'}$. Darin ist $2^{2m}+1 = F_1M_1$ mit $F_1 = 5$, $M_1 \equiv 5\ mod\ 8$ und $2^{2m}-1 = (2^m+1)(2^m-1)$ mit $2^m+1 = F_0M_0$, $F_0 = 3$, $M_0 \equiv 3\ mod\ 8$, und $2^m-1 = (2^{p_j}-1)N_{j-} \equiv (2^{p_j}-1) \equiv 2^{2m}-1 \equiv 7\ mod\ 8$, $N_{j-} \equiv 1\ mod\ 8$. Nun gilt $3\backslash(2^{2m}-1)$, $3\backslash(2^m+1)$, $3 \nmid (2^m-1)$, $3 \nmid (2^{2m}+1)$. Es ist $2^{2m}+1 \equiv 5^2\ mod\ 8$ und $2^{2m}-1 = (2^m+1)(2^m-1) \equiv (3^2\ mod\ 8)\cdot(7\ mod\ 8)$, worin kein Faktor $\equiv 5\ mod\ 8$, also kein $p^{'}$ vorkommt. Deshalb kann $p^{'} \equiv 5\ mod\ 8$ nur Teiler von $(2^{2m}+1)$ sein, also gilt (24) mit $n = 2m$. (Sollte nämlich in 2^m-1 ein Faktor $\equiv 5\ mod\ 8$ enthalten sein, so müßte auch ein Faktor $\equiv 3\ mod\ 8$ darin möglich sein, damit $\equiv 7\ mod\ 8$ entsteht. Der Faktor $\equiv 3\ mod\ 8$ tritt aber in 2^m+1 auf, das teilerfremd zu 2^m-1 ist.)

c) Im Falle $\alpha \geq 2$ gilt schließlich $1+m2^{1+\alpha} \equiv 1\ mod\ 8\ \forall m$, $\frac{p^{'}-1}{2} = n = m2^{\alpha}$. Statt (28) haben wir dann

$$2^{p^{'}-1}-1 = 2^{2n}-1 = p^{'}M = 3p^{'}M^{'} = (2^n+1)(2^n-1) = (2^m-1)\prod_{\nu=0}^{\alpha} F_\nu M_\nu,$$

worin $2^n+1 = F_\alpha M_\alpha$ mit $F_\alpha \equiv M_\alpha \equiv 1\ mod\ 2^{(2^\alpha)}\ \forall\alpha \geq 2$ und

$$2^n-1 = (2^{p_j}-1)N_{j-}\cdot 3M_0\cdot 5M_1\prod_{\nu=2}^{\alpha-1} F_\nu M_\nu$$

mit $\prod_{\nu=2}^{1} F_\nu M_\nu = 1$ für $\alpha = 2$. Darin bezeichnet p_j einen beliebigen Teiler von m, für den Satz 2.4. die angegebene Darstellung garantiert.

Es kann nun $p^{'}\backslash(2^n+1)$ nicht gelten, weil beide angegebenen Faktoren $\equiv 1\ mod\ 2^{(2^\alpha)}$ erfüllen, während $p^{'} = 1+m2^{1+\alpha} \equiv 1\ mod\ 2^{1+\alpha}$ nur erfüllt mit $2^{1+\alpha} < 2^{(2^\alpha)}\forall\alpha > 2$. Daß für $\alpha = 2$ gilt $2^{1+\alpha} = 2^{(2^\alpha)}$, stört nicht, weil $m > 1$ vorausgesetzt ist. Dann muß also (21) gelten; **q.e.d.**

Ob der Teiler $p^{'}$ nun $p^{'}\backslash(2^m-1) = (2^{p_j}-1)N_{j-}$ mit $N_{j-} \equiv 1\ mod\ 8$ erfüllt oder $p^{'}\backslash F_\nu M_\nu$, $F_\nu \equiv M_\nu \equiv 1\ mod\ 8$, bleibt offen.

3 Eine unendliche Folge Fermat'scher Primzahlen

Die Kapitel 3 und 4 der ersten Fassung dieses Artikels sind fehlerhaft und werden als gegenstandslos gestrichen, denn nach privater Mitteilung von D.Eschbach gibt es in der Literatur Gegenbeispiele, s.a. http://www.prothsearch.net/fermat.html.

4 Unendliche Folgen Mersennescher Primzahlen

5 Exakte Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer vorgegebenen Schranke

5.1 Vorbereitende Bemerkungen

In Analogie zur Fakultätsfunktion $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ wird die Primfakultät , in Zeichen $p_i \downarrow$, erklärt durch **Def. 5.1:**

$$p_n \downarrow = \prod_{i=1}^{n} p_i \ , \tag{32}$$

wobei p_i das i-te Element in der natürlichen Folge der Primzahlen $\{p_i\}$ bedeutet.

Def. 5.2. Es sei x eine beliebige reelle Zahl. Dann bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl, die noch kleiner oder gleich x ist, und $\prec x \succ$ sei die größte Primzahl, die $\leq x$ ist.

Bemerkung 5.2.1. Stets gilt

$$\prec x \succ \leq [x] \leq x \ \forall x \geq 2. \tag{33}$$

Def. 5.3. Es bezeichne $C_{i,m,k}$ das zahlenmäßige Produkt aller Elemente der k-ten Kombination von i Elementen ohne Wiederholungen. Der Index k soll keine Ordnung der Kombinationen, sondern lediglich deren Unterscheidbarkeit und somit Numerierbarkeit bewirken. Es gelte

$$C_{0,m,k} = 1 \ \forall m, k, \tag{34}$$

d.h. eine Kombination aus $i = 0$ Elementen soll den Faktor 1, die multiplikative Invariante, ergeben.

Bemerkung 5.3.1. Die über k summierte Anzahl B der Kombinationen $C_{j,i-1,k}$ ergibt einen binomischen Koeffizienten

$$B = \binom{i-1}{j} \ . \tag{35}$$

Dann soll abkürzend geschrieben werden:

$$\sum_{\forall k} C_{j,i-1,k} := \sum_{k=1}^{B} C_{j,i-1,k} \ . \tag{36}$$

Bemerkung 5.3.2. Es gilt

$$\left[\frac{x}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] = 0 \ \forall C_{j,i-1,k} > \frac{x}{p_i} \ . \tag{37}$$

Def. 5.4. Es sei x eine beliebige positive reelle Zahl. Dann bezeichne i_0 den durch

$$p_{i_0} = \prec \sqrt{x} \succ \tag{38}$$

definierten zugehörigen Index in der natürlichen Folge der Primzahlen.

Lemma 5.1. Seien $\{a, b\}$ reelle Zahlen, $a = [a] + \epsilon_a$, $b = [b] + \epsilon_b$, $0 \leq \epsilon_{a,b} < 1$. Dann gilt

$$a \geq [a]\,,\ [- \mid a \mid] \leq - \mid a \mid \leq -[\mid a \mid] \leq 0,$$

$$-[- \mid a \mid] \geq \mid a \mid \geq [\mid a \mid] \geq 0 \geq - \mid a \mid \geq [- \mid a \mid]\,, \tag{39}$$

für $a < 0$ ist $[- \mid a \mid] = [a]$ *und* $[-a] = [\mid a \mid]$;

$$a + b \geq [a + b] \geq [a] + [b]\,,\ a \geq [a] \geq [a - b] + [b]\,,\ [a] - [b] \geq [a - b]\,; \tag{40}$$

$$[a] - \sum_i [b_i] \geq \left[a - \sum_i b_i\right]\ ; \tag{41}$$

$$[\mid a \mid] + [- \mid b \mid] \leq [\mid a \mid - \mid b \mid] \leq \mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a \mid - [\mid b \mid]\,. \tag{42}$$

Bew.: Die Beziehungen (39) entsprechen der Definition 5.2. , woraus ebenfalls folgt $a + b \geq [a + b] = [[a] + \epsilon_a + [b] + \epsilon_b] = [a] + [b] + [\varepsilon_a + \varepsilon_b] \geq [a] + [b]$, weil $[a]$ und $[b]$ als ganzzahlige Größen ohne Wertänderung aus der Summe in der äußeren eckigen Klammer herausgezogen werden können und $0 \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b < 2$ gilt, womit die erste Formel (40) gezeigt ist. Die zweite Ungleichung unter (40) folgt aus der ersten mit $a' = a - b$, also $a \geq [a] = [a - b + b] = \left[a' + b\right] \geq [a - b] + [b]$. Die dritte Ungleichung ist eine Umstellung der zweiten. Wegen $[a] = [a - \sum_i b_i + \sum_i b_i] \geq [a - \sum_i b_i] + [\sum_i b_i] \geq [a - \sum_i b_i] + \sum_i [b_i]$ folgt sofort (41). Ersetzt man in (40) a durch $a' = \mid a \mid$ und b durch $b' = - \mid b \mid$, so folgt (42) mit Hilfe von (39); **q.e.d.**

Lemma 5.2. Seien $\{a, b\}$ reelle Zahlen, $\{c, n\}$ natürliche Zahlen. Es gelte $\mid a \mid \geq \mid b \mid$ und $a \neq nbc$. Dann gilt für $c = 1$

$$\frac{a}{bc} \geq \frac{1}{c}\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$$

sowie $\forall c > 1$

$$\frac{a}{bc} \geq \frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c} \geq \left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right] \geq \left[\frac{1}{c}\right]\left[\frac{a}{b}\right] = 0 \tag{43}$$

sowie

$$\left[\frac{a}{b}\right] - \left[\frac{a}{bc}\right] \geq \left[\frac{a}{b}\right]\left(1 - \frac{1}{c}\right). \tag{44}$$

Bew.: Die Aussage für $c = 1$ ist trivial wegen $\left[\frac{1}{c}\right] = \frac{1}{c} = 1$, weswegen auch (44) für $c = 1$ auf $0 = 0$ führt. Für $c > 1$ gilt wegen $\frac{a}{b} = \left[\frac{a}{b}\right] + \varepsilon$ mit $0 \leq \varepsilon < 1$ und $[a] \leq a = n_a b + r_b$,$0 \leq r_b < b$, $\frac{a}{b} = \frac{n_a b + r_b}{b} = n_a + \frac{r_b}{b}$ mit $n_a = \left[\frac{a}{b}\right]$, $0 \leq \frac{r_b}{b} = \varepsilon_b < 1$. Es enthält n_a stets das Vorzeichen von $\frac{a}{b}$, welches in der $[\cdot]$ bleiben muß und nicht etwa mit der als positiv vorausgesetzten Konstante c herausgezogen werden darf. Nach Division durch c ergibt sich

$$\frac{a}{bc} = \frac{n_a}{c} + \frac{r_b}{bc} = n_c + \frac{r_c}{c} + \frac{r_b}{bc} = n_c + \frac{1}{c}\left(r_c + \frac{r_b}{b}\right)$$

mit $0 \leq r_c \leq c - 1$, also $0 \leq r_c + \frac{r_b}{b} < c$, sodaß $n_c = \left[\frac{a}{bc}\right]$, $0 \leq \varepsilon_{bc} := \frac{r_c}{c} + \frac{r_b}{bc} < 1$ gilt. Dann hat man

$$\left[\frac{a}{bc}\right] = \left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c} + \frac{r_b}{bc}\right] = \left[\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] + \frac{r_c}{c} + \frac{r_b}{bc}\right] = \left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] \tag{45}$$

als ganzzahligen Anteil aus der dritten eckigen Klammer, deren gebrochener Teil unterdrückt werden soll. Dann folgt

$$\frac{a}{bc} \geq \frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c} \geq \left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right] \geq \left[\frac{1}{c}\right]\left[\frac{a}{b}\right] = 0,$$

also (43), und daraus $-\left[\frac{a}{bc}\right] \geq -\frac{1}{c}\left[\frac{a}{b}\right]$, was nach Addition von $\left[\frac{a}{b}\right]$ gerade (44) ergibt; **q.e.d.**

Lemma 5.3. Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.3. gilt unter Beachtung der Bemerkungen 5.3.1. und 5.3.2.

$$\sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\forall k} \frac{(-1)^j}{C_{j,i-1,k}} = \prod_{j=1}^{i-1}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \tag{46}$$

und

$$\sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\forall k} \frac{1}{C_{j,i-1,k}} = \prod_{j=1}^{i-1}\left(1 + \frac{1}{p_j}\right). \tag{47}$$

Bew.: Die linke Seite von (46) ergibt sich bei sukzessiver Berechnung des Produktes der rechten Seite: Für $i = 1$ hat man nach Definition

$$\prod_{j=0}^{0}\left(1 \mp \frac{1}{p_j}\right) = 1,$$

$i = 2:$

$$\prod_{j=1}^{1}\left(1 \mp \frac{1}{p_j}\right) = 1 \mp \frac{1}{p_1} = \begin{cases} 1/2 \\ 3/2 \end{cases},$$

$i = 3:$

$$\prod_{j=1}^{2}\left(1 \mp \frac{1}{p_j}\right) = \left(1 \mp \frac{1}{p_1}\right)\left(1 \mp \frac{1}{p_2}\right) = \sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}\frac{(\pm 1)^j}{C_{j,i-1,k}} = \begin{cases} 1/3 \\ 2 \end{cases}.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Formel gilt $\forall i \leq i_0 - 1 = 2$. Dann gilt für $i = i_0$:

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{i_0-1}\left(1 \mp \frac{1}{p_j}\right) &= \left(1 \mp \frac{1}{p_{i_0-1}}\right)\prod_{j=1}^{i_0-2}\left(1 \mp \frac{1}{p_j}\right) \\ &= \left(1 \mp \frac{1}{p_{i_0-1}}\right)\sum_{j=0}^{i_0-2}\sum_{\forall k}\frac{(\pm 1)^j}{C_{j,i_0-2,k}} = \sum_{j=0}^{i_0-1}\sum_{\forall k}\frac{(\pm 1)^j}{C_{j,i_0-1,k}};\end{aligned}$$

q.e.d.

5.2 Die Anzahl echt teilbarer natürlicher Zahlen $\leq$ x

Die Zahl 1 gehört als multiplikative Invariante nicht zu den Primzahlen, denn sie kann in beliebiger ganzzahliger Potenz einer beliebigen Zahl hinzugefügt werden, ohne deren Wert zu ändern, obwohl sie der landläufigen Primzahldefinition genügt, daß sie ganzzahlig nur durch 1 und sich selbst geteilt werden kann. Sie soll im Folgenden mit den echt teilbaren natürlichen Zahlen zusammen die Klasse der Nichtprimzahlen bilden. Bezeichnet $\sigma(x)$ die Anzahl aller Nichtprimzahlen $\leq x$ und $\pi(x)$ die Anzahl aller Primzahlen $\leq x$, so gilt

$$x = \sigma(x) + \pi(x). \tag{48}$$

Satz 5.1. Die Anzahl der echt teilbaren natürlichen Zahlen (inclusive der Zahl 1) im abgeschlossenen Intervall $[1, x]$ beträgt mit i_0 gemäß Definition 5.4. und der eckigen Klammer nach Definition 5.2.

$$\sigma(x) = 1 + \sum_{i=1}^{i_0}\left(-1 + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\sum_{\forall k}\left[\frac{x}{p_i C_{j,i-1,k}}\right]\right). \tag{49}$$

Bew.: Wie in allen Siebmethoden sollen in der Folge der natürlichen Zahlen $\{n_i\}$, $n_i \leq x$, sukzessive alle Vielfachen der Primzahlen p_i gestrichen und die Anzahlen $\sigma_i(x)$ der echt durch p_i teilbaren ermittelt werden, die, beginnend mit der kleinsten Primzahl $p_1 = 2$, noch ungestrichen stehen geblieben sind.

Schritt 0: Streichung der natürlichen Zahl 1 in $\{n_i\}$ als Nichtprimzahl. Es ist $\sigma_0(x) = 1$.

Schritt 1: In $\{n_i\}$ stehen $\sigma_1'(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$ Zahlen , die ohne Rest durch $p_1 = 2$ teilbar sind. Die erste dieser Zahlen ist p_1 selbst, welche nicht zu streichen ist, sodaß $\sigma_1(x) = \left[\frac{x}{p_1}\right] - 1$ Streichungen hinzukommen. Zusammen sind nun $s_1(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x) = \left[\frac{x}{p_1}\right]$ Zahlen gestrichen.

Schritt 2: In $\{n_i\}$ waren $\sigma_2'(x) = \left[\frac{x}{p_2}\right]$ Zahlen ohne Rest durch $p_2 = 3$ teilbar. Davon ist p_2 selbst abzuziehen sowie alle geraden Vielfachen von p_2, die schon im ersten Schritt erfaßt wurden, nämlich $\left[\frac{x}{p_1 p_2}\right]$ Stück. Somit sind neu zu streichen $\sigma_2(x) = \left[\frac{x}{p_2}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1 p_2}\right]$, sodaß gilt

$$s_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \sigma_i(x) = 1 + \left[\frac{x}{p_1}\right] - 1 + \left[\frac{x}{p_2}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1 p_2}\right].$$

Unter Beachtung der Definitionen 5.2. und 5.3. erkennt man, daß die Behauptung (49) bis zum $(i_0 - 1)-$ ten Schritt, $(i_0 - 1) = 2$, erfüllt ist. Damit folgt durch Schluß von $(i_0 - 1)$ auf i_0

Schritt i_0 : Die kleinste in den ersten $(i_0 - 1)$ Schritten nicht gestrichene Zahl, die noch $> p_{i_0 - 1}$ ist, ist die nächste Primzahl p_{i_0}. Die Anzahl der in $\{n_i\}$ existenten ganzzahligen Vielfachen von p_{i_0} ist $\sigma_{i_0}'(x) = \left[\frac{x}{p_{i_0}}\right] - 1$. Diese Zahl ist zu vermindern um alle bereits gestrichenen gemeinsamen Vielfachen von p_i mit p_j , $j = 1, 2, \ldots, (i-1)$, also $\sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right]$. Diese letzte Summe ist ihrerseits zu vermindern um die Vielfachen mit 3 gemeinsamen Primfaktoren, also um $\sum_{j_{1,2}=1}^{i_0-1} \left[\frac{x}{p_{i_0} p_{j_1} p_{j_2}}\right]$, $j_2 > j_1$, die sonst doppelt gezählt würden. Allgemein ist jede solche Summe mit k Faktoren im Nenner ihrerseits zu vermindern um eine solche mit $(k+1)$ Nennerfaktoren, solange bis $k = i_0$ erreicht wird:

$$\sigma_{i_0}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{i_0} \left(-1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{x}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] \right).$$

Dies ist die behauptete Beziehung (49). Es bleibt lediglich noch darauf hinzuweisen, daß das Verfahren mit dem i_0-ten Schritt abbricht, wenn i_0 gemäß Definition 5.4. ermittelt wird, weil spätestens dann alle Nichtprimzahlen $\leq x$ gestrichen sind; **q.e.d.**

Zur Veranschaulichung der Gleichung (49) mögen folgende Beispiele dienen.

Beispiel 1: $x = 122,\ p_{i_0} = \prec \sqrt{122} \succ = 11$, also $i_0 = 5$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 + \left(\left[\frac{x}{p_1}\right] - 1\right) + \left(\left[\frac{x}{p_2}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1 p_2}\right]\right) \\ &+ \left(\left[\frac{x}{p_3}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1 p_3}\right] - \left[\frac{x}{p_2 p_3}\right] + \left[\frac{x}{p_1 p_2 p_3}\right]\right) + s_4 + s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \left[\frac{x}{p_4}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1 p_4}\right] - \left[\frac{x}{p_2 p_4}\right] - \left[\frac{x}{p_3 p_4}\right] + \left[\frac{x}{p_1 p_2 p_4}\right] + \left[\frac{x}{p_1 p_3 p_4}\right] + \left[\frac{x}{p_2 p_3 p_4}\right] \\ &- \left[\frac{x}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right] \end{aligned}$$

$$s_5 = \left[\frac{x}{p_5}\right] - 1 - \left[\frac{x}{p_1p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_2p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_3p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_4p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_1p_2p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_1p_3p_5}\right]$$
$$+ \left[\frac{x}{p_1p_4p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_2p_3p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_2p_4p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_3p_4p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_1p_2p_3p_5}\right]$$
$$- \left[\frac{x}{p_1p_2p_4p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_1p_3p_4p_5}\right] - \left[\frac{x}{p_2p_3p_4p_5}\right] + \left[\frac{x}{p_1p_2p_3p_4p_5}\right] ,$$

$$\sigma(122) = 1 + (61-1) + (40-1-20) + (24-1-12-8+4)$$
$$+ (17-1-8-5-3+2+1+1-0)$$
$$+ (11-1-5-3-2-1+1+1+0+\cdots+0) = 92.$$

Daraus folgt nach (48) für die Anzahl Primzahlen bis 122 in Übereinstimmung mit Primzahltafeln $\pi(122) = 122 - \sigma(122) = 30$.

Das Beispiel zeigt, daß es zur Berechnung von $\pi(122)$ reicht, alle Primzahlen $\leq \prec \sqrt{122} \succ = 11 = p_5$ zu kennen, obwohl die größte Primzahl, die bis $x = 122$ auftritt, $p_{30} = 113$ lautet.

Beispiel 2: $x = 168$; mittels derselben Formel erhält man $\sigma(168) = 129$, also $\pi(168) = 39$. Es ist $p_{39} = 167$, denn erst ab $x = 169$ ist $p_6 = 13$ in der Formel für $\sigma(x)$ zu berücksichtigen. Für konkrete Berechnungen von $\sigma(x)$ bzw. $\pi(x)$ für große Zahlen x ist dieses Verfahren natürlich zu aufwändig. Ein möglichst frühzeitiges Erkennen aller Nullsummanden wäre im Interesse einer Aufwandsreduzierung wünschenswert, wie es im Falle des letzten Summanden möglich ist, weil $\forall x > 2$ gilt $p_i \downarrow> x$.

Offensichtlich bietet aber die Kenntnis der Gleichung (49) prinzipiell eine Möglichkeit, über die Primeigenschaft einer ungeraden Zahl $x = 2n+1$ zu entscheiden, indem man $\Delta = \sigma(2n+1) - \sigma(2n)$ bildet. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis aller Primzahlen $\leq p_{i_0} = \prec \sqrt{2n+1} \succ$. Ergibt sich $\Delta = 1$, so ist x teilbar; im Falle $\Delta = 0$ ist x Primzahl. Es ist hierzu keinerlei Kenntnis über Primzahlen $> p_{i_0}$ erforderlich. Berechnet man zusätzlich $\sigma(2n+3)$, so erfährt man, ob ein Primzahlzwilling vorliegt. Gilt $\Delta_2 = \sigma(2n+3) - \sigma(2n+1) = 2$, so muß $x = 2n+3$ neben $2n+2$ teilbar sein, für $\Delta_2 = 1$ ist $x_2 = 2n+3$ Primzahl. D.h. für $\Delta = \Delta_2 = 1$ gilt $\{2n+1, 2n+3\} = \mathit{Primzahlzwilling}$. Auch hierzu zwei simple Beispiele aus dem Intervall $p_3^2 = 25 < x < p_4^2 = 49$. Wegen $i_0 = 3$ genügt die Betrachtung der Formel aus Beispiel 1 ohne s_4 und s_5.

Beispiel 3: $2n = 28$ liefert $\sigma(2n) = 19$, $\pi(2n) = 9$, $\sigma(2n+1) = 19$, $\pi(2n+1) = 10$. Also ist 29 eine Primzahl. Wegen $\sigma(2n+3) = 20$, $\pi(2n+3) = 11$ ist auch 31 Primzahl, also ist $\{29, 31\}$ ein Primzahlzwilling.

Beispiel 4: $2n = 40$ liefert $\sigma(40) = 28$, $\pi(40) = 12$, $\sigma(41) = 28$, $\pi(41) = 13$, $\sigma(43) = 29$, $\pi(43) = 14$, also ist auch $\{41, 43\}$ Zwilling.

5.3 Ein Satz zur Primzahlverteilung

Satz 5.2. Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es $\forall n < \infty$ kein links offenes Intervall

$$\eta_n := \left(n^2, (n+1)^2\right], \tag{50}$$

das nicht mindestens 2 Primzahlen enthält.

Es gilt sogar für die Anzahl der Primzahlen in η_n

$$\lim_{\eta_n \to \infty} \pi(\eta_n) \simeq \lim_{\eta_n \to \infty} \frac{2n+1}{2\ln(n+1)} = \infty. \tag{51}$$

Bew.: Für $n = 1$ enthält das Intervall $\eta_1 = (1, 4]$ nur 2 innere Zahlen, die Primzahlen 2 und 3. Die Intervallränder sind konstruktionsbedingt stets nichtprim. Nach (49) ergibt sich die Anzahl von Nichtprimzahlen im Intervall (50) zu

$$\sigma(\eta_n) = \sigma\left((n+1)^2\right) - \sigma\left(n^2\right) = 1 + \sum_{i=1}^{i_0'} \left(-1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{(n+1)^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right]\right)$$
$$- \left(1 + \sum_{i=1}^{i_0} \left(-1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{n^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right]\right)\right). \tag{52}$$

Darin bedeuten i_0, i_0' die Indizes aus

$$p_{i_0} = \prec \sqrt{n^2} \succ = \prec n \succ \text{ und } p_{i_0'} = \prec n+1 \succ. \tag{53}$$

Aus (52) folgt

$$\sigma(\eta_n) = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{(n+1)^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] - \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{n^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] + D$$

mit

$$D = \sum_{i=i_0+1}^{i_0'} \left(-1 + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{(n+1)^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right]\right). \tag{54}$$

Es ist

$$D = \begin{cases} 0 \text{ für } i_0 = i_0', \text{ d.h. } n+1 \neq \mathit{Primzahl}, \\ -1 + \sum_{j=0}^{i_0} (-1)^j \sum_{\forall k} \left[\frac{(n+1)^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] \text{ sonst.} \end{cases}$$

Da n und $(n+1)$ benachbarte natürliche Zahlen sind, kann $i_0' > i_0$ nur gelten, wenn $(n+1) = p_{i_0+1} = p_{i_0'}$ selbst Primzahl ist. Für den Fall, daß $(n+1)$ nichtprim ist, muß daher gelten $i_0' = i_0$, woraus $D = 0$ folgt. Dann lassen sich die Summen vollständig zusammenfassen:

$$\sigma(\eta_n) = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sum_{\forall k} \left(\left[\frac{(n+1)^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right] - \left[\frac{n^2}{p_i C_{j,i-1,k}}\right]\right). \tag{55}$$

Am Schluß des Beweises von Satz 5.1. wurde darauf hingewiesen, daß im Ausdruck für $\sigma(x)$ die Summe über i automatisch bei i_0 abbricht. Läßt man nun im Ausdruck $\sigma(\eta_n)$ auch für $\sigma(n^2)$ die Summe über i bis $i_0^{'}$ laufen wie bei $\sigma\left((n+1)^2\right)$, so begeht man keinen Fehler, weil dadurch der Wert weder für $\sigma(n^2)$ noch für $\sigma(\eta_n)$ geändert wird. Ersetzt man in (55) i_0 durch $i_0^{'}$, so stellt diese Gleichung den allgemein gültigen Ausdruck für $\sigma(\eta_n)$ dar. Wir lassen daher im Folgenden einfach D weg und interpretieren das i_0 als $i_0^{'}$. Durch Einführung der Summationsschrittweite 2 (in Zeichen: $\sum_{j=0(2)}^{i-1}\cdots$) lassen sich Terme mit gleichen Vorzeichen in endlichen Summen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_n) &= \sum_{i=1}^{i_0}\Bigg\{\sum_{j=0(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{(n+1)^2}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]-\sum_{j=1(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{(n+1)^2}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]\\ &\quad -\sum_{j=0(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{n^2}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]+\sum_{j=1(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{n^2}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{56}$$

Diese Gleichung sollte nun nach beiden Seiten abgeschätzt werden. Mit Hilfe von (40) schätzt man ab $\left[\frac{(n+1)^2}{pC}\right]-\left[\frac{n^2}{pC}\right]\geq\left[\frac{2n+1}{pC}\right]$ und $\left[\frac{(n+1)^2}{pC}\right]-\left[\frac{n^2}{pC}\right]\leq-\left[-\frac{2n+1}{pC}\right]$, letzteres folgt durch Multiplikation mit (-1) aus $\left[\frac{n^2}{pC}\right]-\left[\frac{(n+1)^2}{pC}\right]\geq\left[-\frac{2n+1}{pC}\right]$. Die Zusammenfassung beider Ungleichungen ergibt

$$\left[\frac{2n+1}{pC}\right]\leq\left[\frac{(n+1)^2}{pC}\right]-\left[\frac{n^2}{pC}\right]\leq-\left[-\frac{2n+1}{pC}\right] \tag{57}$$

und

$$-\left[\frac{2n+1}{pC}\right]\geq-\left[\frac{(n+1)^2}{pC}\right]+\left[\frac{n^2}{pC}\right]\geq\left[-\frac{2n+1}{pC}\right]. \tag{58}$$

In (56) werden nun die Terme mit gleichem Summationsschritt zusammengefaßt sowie der 1. und 3. Term mittels (57), der 2. und 4. Term mittels (58) abgeschätzt:

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_n) &\geq \sum_{i=1}^{i_0}\left(\sum_{j=0(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]+\sum_{j=1(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[-\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]\right)\\ &= \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[(-1)^j\,\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]\end{aligned} \tag{59}$$

sowie

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_n) &\leq \sum_{i=1}^{i_0}\left(\sum_{j=0(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}-\left[-\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]-\sum_{j=1(2)}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right]\right)\\ &= -\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}\left[(-1)^{j+1}\,\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\right].\end{aligned} \tag{60}$$

Aus der Vereinigung von (59) und (60) folgt nach Abschätzung gemäß (39) - imFalle von (60) mit umgekehrtem Vorzeichen -

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}(-1)^j\,\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\le\sigma(\eta_n)\le\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}(-1)^j\,\frac{2n+1}{p_iC_{j,i-1,k}}\ , \tag{61}$$

also die Gleichheit. Durch Einsetzen von (46) ergibt sich

$$\sigma(\eta_n)=(2n+1)\sum_{i=1}^{i^0}p_i^{-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{\forall k}\frac{(-1)^j}{C_{j,i-1,k}}=(2n+1)\sum_{i=1}^{i_0}p_i^{-1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right). \tag{62}$$

Darin gilt nach Definition $\prod_{j=1}^{0}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=1$. Wegen (48), angewendet auf das Intervall η_n mit der Breite $b_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$, gilt dann

$$\pi(\eta_n)=2n+1-\sigma(\eta_n)=(2n+1)\left(1-\sum_{i=1}^{i_0}p_i^{-1}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right). \tag{63}$$

Ersetzt man $-p_i^{-1}=\left(-1+\left(1-p_i^{-1}\right)\right)$ und multipliziert dies aus (Umordnungen in endlichen Produkten sind erlaubt) , so heben sich Summanden paarweise auf. Man erhält

$$S_n:=\frac{\pi(\eta_n)}{2n+1}=1+\sum_{i=1}^{i_0}\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)-\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right)=\prod_{j=1}^{i_0}\left(1-\frac{1}{p_j}\right). \tag{64}$$

Diese Formel liefert bei numerischer Auswertung für kleine Werte von n, $p_{i_0}=\prec n+1\succ$ die reale Anzahl von Primzahlen im n-ten Quadratintervall mit einem maximalen Fehler von ±2 für $n\le40$ bei Verwendung ganzzahlig abgerundeter Werte. Auch die daraus bestimmte Anzahl von Primzahlen $\le x$, $\pi(x)=\sum_{n=0}^{n_0}\pi(\eta_n)$, liefert, s. **Tab. 5.1.**, sinnvolle Werte:

n_0	10	20	30	40
$\pi\left((n_0+1)^2\right)$	26	80	161	266
Realwert	30	85	162	263

Wir bilden nun $\ln S_n$, spalten den 1. Term ab und entwickeln dann den Logarithmus in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}\ln S_n &= \ln\prod_{j=1}^{i_0}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=\ln\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{i_0}\ln\left(1-\frac{1}{p_j}\right)=\ln\frac{1}{2}-\sum_{j=2}^{i_0}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu p_j^{\nu}}\\ &= \ln\frac{1}{2}-\sum_{j=2}^{i_0}\frac{1}{p_j}-\sum_{j=2}^{i_0}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu p_j^{\nu}}.\end{aligned} \tag{65}$$

Darin ist $A = -\sum_{j=2}^{i_0}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu p_j^{\nu}} = const.$, denn wegen $\nu \geq 2$ ist A eine absolut konvergente Reihe. Aus der Literatur [1], p.343, Satz 5, entnehmen wir die Aussage

$$\sum_{j=1}^{i_0}\frac{1}{p_j} = \ln\ln p_{i_0} + c + O\left(\frac{1}{\ln p_{i_0}}\right), \tag{66}$$

worin $c = const.$ und $O\left(\frac{1}{\ln p_{i_0}}\right)$ den Fehlerterm bezeichnet. Der Wert $\ln\ln x = 0$ wird für $x = e$ angenommen, $\ln\ln p_1 = \ln\ln 2 = -0,3665129\ldots < 0,\ \ln\ln 3 = 0,094047827\ldots$, $\ln 3 = 1,098612289\ldots$. Da in (65) $j = 2,\ldots,i_0$ läuft, haben wir die Belegung der Konstanten etwas zu modifizieren. Um den Wert von $\ln\ln p_{i_0}$ benutzen zu können, haben wir davon $\ln\ln 3$ abzuziehen. So erhält man schließlich

$$\ln S_n = \ln\frac{1}{2} - \left(\ln\ln p_{i_0} - \ln\ln 3 + c + O\left(\frac{1}{\ln p_{i_0}}\right) + A\right) \tag{67}$$

sowie durch Exponentiation

$$S_n = \frac{\pi(\eta_n)}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln p_{i_0}}\cdot A' \tag{68}$$

mit $A' = (\ln 3)\, e^{-c+A-O\left(1/\ln p_{i_0}\right)}$. Dies ist die Aussage des Gauß'schen Primzahlsatzes für Quadratintervalle. Für $0 \simeq A - c - O(1/\ln p_{i_0})$ wird $A' \simeq \ln 3$.

Wenn aber die Primzahlverteilung über jedem Quadratintervall diesem logarithmischen Gesetz gehorcht, gilt sie für jedes beliebige größere Intervall, also auch für $(1,x]$, wie es der Gauß'sche Primzahlsatz verlangt: $\pi(x) = A''\left(\frac{x}{\ln x}\right)\ln 3$, denn $2\ln p_{i_0} = \ln p_{i_0}^2 \simeq \ln(n+1)^2 = \ln x$. Die Formel $\pi(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)$ gibt im allgemeinen Werte, die um $5\ldots 10\%$ zu niedrig liegen. Der Faktor $\ln 3$ vergrößert sie um 9,86% , sodaß wohl $A'' < 1$, aber nahe bei 1, anzunehmen ist.

Wir haben hier das logarithmische Verteilungsgesetz für Quadratintervalle abgeleitet aus einer (ziemlich koplizierten) exakten Formel, daraus auf seine allgemeine Gültigkeit geschlossen und den Gauß'schen Satz als Approximation erhalten; **q.e.d.**

Die **Abb. 5.1.** zeigt $\forall n \leq 240$ die Anzahlen $\pi(\eta_n)$ =PiEn und $\pi(\eta_{A,n}) = \pi(2n+1) = \frac{A'(2n+1)}{\ln(n+1)}$ =PiEAn sowie die gemäß (71) streuenden Funktionen $\pi_s(\eta_n) = \pi(\eta_n)(1+\delta)$ mit $\delta = 0$ für den Mittelwert $g(n)$, $\delta = +\frac{A'}{\ln(n+1)}$ als obere Schranke $go(n)$, $\delta = -\frac{A'}{\ln(n+1)}$ als untere Schranke $gu(n)$. Der im Mittel stetige Anstieg ist deutlich zu erkennen, ebenso daß im Anfangsintervall gleicher Größe $\eta_{A,n} := [0, 2n+1]$ der Gauß'sche Satz $\pi(\eta_{A,n}) = \frac{A'(2n+1)}{\ln(n+1)} \approx 2\pi(\eta_n)$ ergibt.

Abb. 5.1.: Primzahlanzahlen über Quadratintervallen $\pi(\eta_n)$ und in gleichgroßen Anfangsintervallen $\pi(\eta_{A,n})$

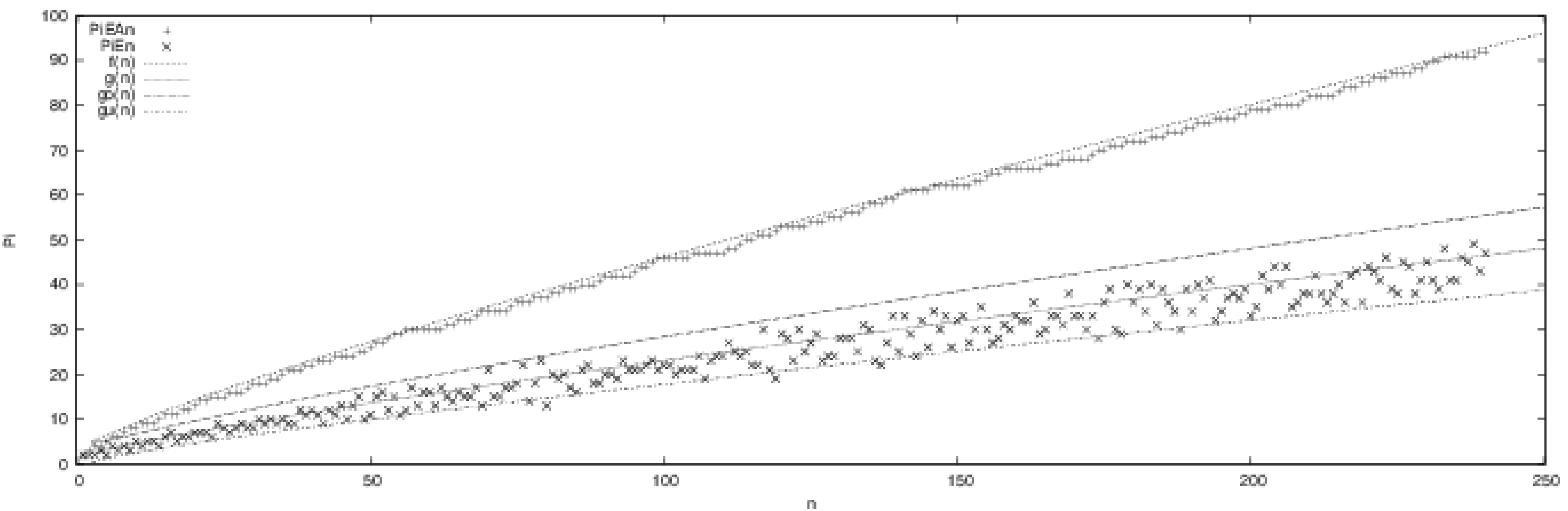
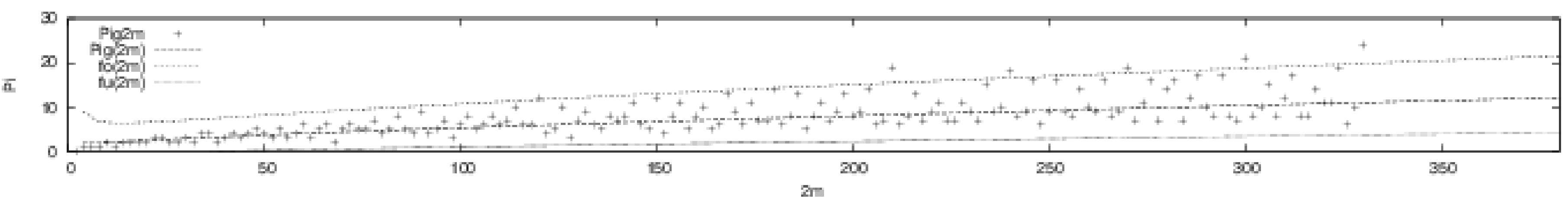


Abb. 9.1.: Streuende Anzahl von Goldbachpaar-Darstellungen $\pi_g(2m)$



5.4 Vertrauensgrenzen des Verteilungssatzes

Nach (68) haben wir mit $p_{i_0} = \prec n+1 \succ \cong n+1$ als Wahrscheinlichkeit W aus mittlerer Anzahl $\pi(\eta_n)$ der Primzahlen im Intervall η_n mit der Breite $b_n = 2n+1$ erhalten:

$$W = \frac{\pi(\eta_n)}{b_n} = \frac{A'}{2\ln(n+1)} \approx \frac{A'}{\ln x} \text{ mit } x \epsilon \eta_n. \qquad (69)$$

Der Kehrwert $L_n = \frac{1}{W} = \frac{b_n}{\pi(\eta_n)}$ kann als mittlerer Platzbedarf einer Primzahl in η_n gedeutet werden. Wir bestimmen stattdessen den halben Platzbedarf $\frac{1}{2}L_n'$ eines Primzahlpaares. Die Wahrscheinlichkeit, daß 2 Zahlen Primzahlen in η_n sind, wird durch ihr Wahrscheinlichkeitsprodukt $W_{ges.} = W_{p_1}W_{p_2} = W^2$ gegeben. Dann ist die Streubreite für eine Primzahl in η_n

$$S_n = \frac{b_n}{\frac{1}{2}L_n'} = 2b_nW^2 = 2(2n+1)\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2. \qquad (70)$$

Da $p_1 = 2$ die kleinste Primzahl ist, kann (außer zwischen p_1 und $p_2 = 3$) der minimale Primzahlabstand nicht kleiner als 2 sein. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen ist kleiner als das zugehörige b_n, deshalb gilt $2 \leq p_{i+1} - p_i < b_n$.

Deshalb erhalten wir für die in η_n streuende Anzahl von Primzahlen

$$\pi_s(\eta_n) = b_nW \pm S_n = \frac{A'\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\ln(n+1)} \pm \frac{A'^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\ln^2(n+1)} = \frac{A'\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\ln(n+1)}\left(1 \pm \frac{A'}{\ln(n+1)}\right). \qquad (71)$$

bzw. $\pi_s(x) = \frac{A'x}{\ln x} \pm \frac{2A'^2x}{\ln^2 x}$. Dieser Toleranzbereich ist realistischer als die willkürliche Annahme $\pi_s(x) = \frac{A'x}{\ln x}(1 \pm 0,2)$ und beschreibt die Realität gut, s. Abb. 5.1. und **Tab. 5.2.**:

n	1	10	100	150	300	400	10^3	10^4	10^5	10^6
$\pi(\eta_n)$	2,29	4,4	23,1	31,9	55,8	70,8	154	1151	9207	76725,4
L_n	0,86	10,2	37,9	44,8	58,0	64,0	85,0	151,0	235,9	339,7
$\pm\frac{2n+1}{L_n}$	3,5	2,05	5,30	6,72	10,4	12,5	23,6	132,5	847,7	5886,9

Größere Schwankungen sind möglich: Der wirkliche Extremfall, daß die erste Primzahl am unteren, die zweite am oberen Intervallrand liegt, könnte schlimmstenfalls das Doppelte vom mittleren Primzahlabstand erbringen und statistische "Ausreißer" erklären.

Bezeichnet $\Delta\pi_{max}(x)$ die in der weiteren Umgebung von x auftretenden maximalen Primzahlabstände, so gibt **Tab 5.3.** den Vergleich mit den Primzahlabständen gemäß (70):

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	$8{,}4 \cdot 10^5$
$\Delta\pi_{max}(x)$	4	14	20	36	54	100
$\frac{\ln^2 x}{2A'^2}$	2,36	9,44	21,23	37,75	58,98	82,81

Es wurde mit $A' = 1,06$ gerechnet.

6 Ein falscher Satz

In der Literatur findet man seit langer Zeit die Behauptung, man könne "beliebig große primzahlfreie Intervalle" konstruieren (s. z.B. [1], p. 22 Zeile 12) und die Frage nach einer oberen Schranke für den Abstand benachbarter Primzahlen sei sinnlos. Zum Beweis konstruiert man die Intervalle $[n! \pm 2, n! \pm n]$, die primzahlfreie Intervalle der Mindestlänge $(n-1)$ darstellen, und läßt $n \to \infty$ laufen. Von jeder endlichen Zahl $n! - 1$ rückwärts gezählt, steht natürlich kein beliebig $(= \infty)$ großes primzahlfreies Intervall zur Verfügung. Von $n!+1$ nach "oben" gezählt, steht zunächst nur das endliche primzahlfreie Intervall der Länge $n-1$ bereit. (De facto kann das primzahlfreie Intervall auch doppelt so groß sein!) Die angegebene Konstruktion beweist in der Tat nur, daß "im unendlich fernen Punkt" selbst genau ein beliebig großes primzahlfreies Intervall gedacht werden kann. Dieser "Punkt" ist aber singulär und zugleich der einzige Häufungspunkt der Primzahlen. Der Satz ist also falsch.

Wegen Satz 5.2. gibt es kein primzahlfreies Quadratintervall $\eta_n = \left(n^2, (n+1)^2\right]$. Daraus folgt, daß der maximale Abstand zwischen benachbarten Primzahlen $< 2n$ für jede vorgelegte Zahl $x = n^2$ ist, d.h. $\Delta_{max} = p_{i+1} - p_i < 2\left[\sqrt{p_{i+1}}\right]$. Man kann sogar den Mittelwert $\Delta_{max,M}$ sowie obere und untere Schranken dazu aus dem logarithmischen Verteilungsgesetz über Quadratintervallen ableiten. Wir werden in den folgenden Kapiteln dieser Frage nochmals begegnen. Solche Angaben werden natürlich n-abhängig sein.

Beim Vergleich verschieden mächtiger Mengen muß etwas mehr Sorgfalt aufgewendet werden. Eine Zahl $m = p_n \downarrow$ oder $m = n!$ gehört zur Potenzordnung n, da sie n Faktoren enthält. Das Quadratintervall $\left(\sqrt{m}^2, (\sqrt{m}+1)^2\right]$, in dem m liegt, hat die Potenzordnung $2 < n$ und die lineare Breite $b = 2\sqrt{m} + 1 = 1 + 2\sqrt{n!} \gg n - 1 =$ primzahlfreies Intervall, welches eine lineare Mannigfaltigkeit darstellt, das schon die umgebende Mannigfaltigkeit 2. Ordnung (Quadratintervall) nicht auszufüllen vermag. Dies dürfte die Ursache des Trugschlusses im angeführten Satz von der Konstruierbarkeit "beliebig großer" primzahlfreier Intervalle gewesen sein.

Obwohl also zu jeder beliebig gewählten natürlichen Zahl n$<\infty$ eine natürliche Zahl n'=n!+1konstruierbar ist, der ein primzahlfreies Intervall der Mindestlänge n-1 folgt, gibt es keine natürliche Zahl, der ein beliebig langes primzahlfreies Intervall folgen kann.

7 Zur Verteilung von Primzahlzwillingen

Die Primzahlen sind bezüglich der Multiplikation statistisch unabhängig, denn eine jede Primzahl p enthält als Teiler nur 1 und p und ist selbst kein Teiler irgend einer anderen Primzahl. Primzahlen sind sozusagen die Ein-heiten der Produktmengen. Es ist daher legitim, die Zwillingsbedingung $p_{i+1} = p_i + 2$ zu kombinieren mit dem Primzahlverteilungsgesetz über einem Quadratintervall η_n oder einem größeren Intervall. Zuvor stellen wir noch fest, daß ein Primzahlzwilling mit $p_i > 3$ niemals eine Quadratzahl umgreifen kann. Es müssen daher - außer $\{p_2 = 3, p_3 = 5\}$ mit 2^2 in der

Mitte - die beiden Partner eines beliebigen Primzahlzwillings > 5 stets vollständig ein und demselben Quadratintervall angehören.

Bew.: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ ist $\forall i > 2$ eine stets teilbare Zahl, deshalb kann höchstens $x^2 + 1$ Primzahl sein, sodaß zwar ein Primzahlzwilling am Anfang eines Quadratintervalls, aber vollständig darin stehen kann, wenn x geradzahlig ist. Ist x ungerade, so stehen 2 teilbare Zahlen nebeneinander: x^2und $(x-1)(x+1)$, sodaß ebenso nur der Anfang $x^2 + 1$ des größeren Quadratintervalls für die Bildung eines Primzahlzwillings in Betracht kommt; **q.e.d.**

Für die Primzahldichte über einem Quadratintervall (wahrscheinlichster oder Mittelwert) ergab sich in (68)

$$W = \frac{\pi(\eta_n)}{2n+1} = \frac{A'' \ln 3}{2 \ln p_{i_0}} \tag{72}$$

mit $p_{i_0} = \prec n+1 \succ$, $\eta_n = \left(n^2, (n+1)^2\right]$. Ein Primzahlzwilling ist gekennzeichnet durch die Annahme des geringstmöglichen Primzahlabstandes 2, also $p_{i+1} = p_i + 2$. Da p_i, p_{i+1} im gleichen Quadratintervall liegen müssen, wird ihre Wahrscheinlichkeit durch dasselbe p_{i_0} bestimmt. Es darf also die Zwillingswahrscheinlichkeitsverteilung als $W_z = W_i W_{i+1} = W^2$ angesetzt werden. Bezeichnet $\pi_2(\eta_n)$ die mittlere oder wahrscheinliche Anzahl von Primzahlzwillingen in η_n, so kann geschrieben werden

$$W_z = \frac{\pi_2(\eta_n)}{2n+1} = \frac{A''^2 \ln^2 3}{4 \ln^2 p_{i_0}}$$

oder

$$\pi_2(\eta_n) = \frac{(2n+1) A''^2 \ln^2 3}{4 \ln^2 p_{i_0}} \approx \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) A''^2 \ln^2 3}{2 \ln^2 (n+1)}. \tag{73}$$

Diese Funktion ist in **Abb. 7.1.** zwischen die Punkte der numerisch bestimmten Primzahlzwillings-Anzahlen je η_n $\forall n \le 915$ eingezeichnet und zeigt eine gute Approximation an. Es wurde $A' = A'' \ln(3) = 1,06$ benutzt.

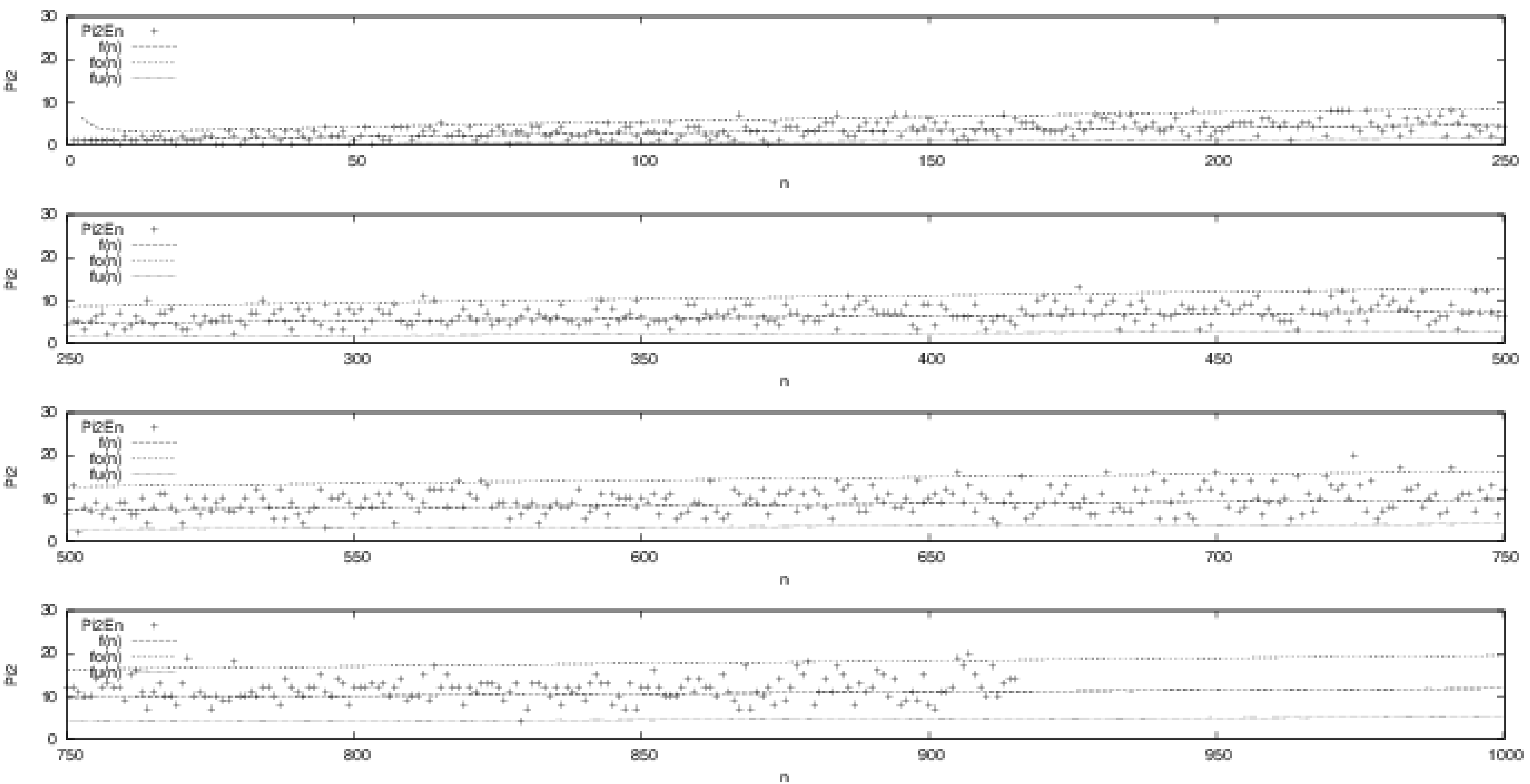
Satz 7.1. Die mittlere Anzahl von Primzahlzwillingen im Quadratintervall η_n steigt gemäß (73) mit n monoton an und wächst für $n \to \infty$ über alle Schranken. Die integrale Anzahl der Primzahlzwillinge wächst dann natürlich erst recht über alle Schranken.

Bew.: Aus der Divergenz des Ausdrucks $y = \frac{\sqrt{x-1/2}}{\ln x}$ (der Logarithmus wächst schwächer als jede Potenzfunktion x^ν *mit* $\nu > 0$) folgt mit $x = n+1$ auch die Divergenz von $y^2 = \frac{n+1/2}{\ln^2(n+1)}$, daran ändert auch der konstante Faktor $\frac{\ln^2 3}{2}$ nichts; **q.e.d.**

Dies Ergebnis ist insofern erstaunlich, als im Anfangsbereich ($n \le 122$) primzahlleere Quadratintervalle existieren für $n = \{9, 19, 26, 27, 30, 34, 39, 49, 53, 77, 122\}$, darunter sogar 2 benachbarte Quadratintervalle. Fragt man aber nach dem größten Wert von n, oberhalb dessen ein vorgegebener ganzzahliger Wert von $\pi_2(\eta_n)$ nicht mehr unterschritten wird, so ergibt sich mit $\pi_2(\eta_{n,max})$ nach (73) aus der Abb.7.1. folgende Tabelle **Tab.7.1.**:

n_{max}	122	213	502	545	829
$\pi_2(\eta_n)$	0	1	2	3	4
$\pi_2(\eta_{n,max})$	3,19	4,47	7,84	8,29	11,09

Abb. 7.1.: $\pi_2(\eta_n)$ experimentell und theoretisch als $f(n)$ incl. Streubereich



Das wirft die Frage nach der Streubreite um die mittlere theoretische Häufigkeit $\pi_2(\eta_n)$ auf. Benutzt man in (68) für $A' = 1,06$ anstelle von $A'' \ln 3 = A'' \cdot 1,0986123\ldots$, so stimmen der Mittelwert

$$\pi(\eta_n) = \frac{n+\frac{1}{2}}{\ln(n+1)} \cdot 1,06 \ , \tag{74}$$

die obere Schranke

$$\pi_{ob.}(\eta_n) = 1,2 \cdot 1,06 \cdot \frac{n+\frac{1}{2}}{\ln(n+1)} \tag{75}$$

und die untere Schranke

$$\pi_{unt.}(\eta_n) = 0,8 \cdot 1,06 \cdot \frac{n+\frac{1}{2}}{\ln(n+1)} \tag{76}$$

für $n < 1000$ befriedigend mit der Realität überein. Durch Quadrieren der Wahrscheinlichkeitsausdrücke ergibt sich damit für Primzahlzwillinge

$$\pi_2(\eta_n) = \frac{n+\frac{1}{2}}{2\ln^2(n+1)} \cdot 1,06^2 \ , \tag{77}$$

$$\pi_{2,ob.}(\eta_n) = \frac{n+\frac{1}{2}}{2\ln^2(n+1)} (1,2 \cdot 1,06)^2 \ , \tag{78}$$

$$\pi_{2,unt.}(\eta_n) = \frac{n+\frac{1}{2}}{2\ln^2(n+1)} (0,8 \cdot 1,06)^2 \ . \tag{79}$$

Während der Mittelwert gut liegt, ist die reale Abweichung vom Mittelwert etwa doppelt so groß. Dieser Mangel wird überwunden, wenn man statt der willkürlichen Streufaktoren 0,8 und 1,2 die besser begründete mittlere Abweichung gemäß (71) einführt.

Wir betrachten 2 Primzahlzwillinge mit der Gesamtwahrscheinlichkeit $W_{ges.} = W_{z_1} W_{z_2} = W_s^2$, weil für genügend große n der Zwillingsabstand $< b_n$ ist. Für den einzelnen Primzahlzwilling verdoppeln wir wieder den streuenden Anteil und erhalten

$$\begin{aligned} \pi_{2,s}(\eta_n) &= (2n+1)\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2 \left(1 + 2\left(4\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2 \pm 4\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)\right) \\ &= (2n+1)\left(\frac{A'}{2\ln(n+1)}\right)^2 (1+\delta_2) \, , \end{aligned} \tag{80}$$

Darin sind die Streufaktoren $\delta_2 = 0$ für den Mittelwert, für die obere und untere Schranke

$$\delta_2 = \delta_{2,+} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 + \frac{4A'}{\ln(n+1)} \ , \tag{81}$$

$$\delta_2 = \delta_{2,-} = 2\left(\frac{A'}{\ln(n+1)}\right)^2 - \frac{4A'}{\ln(n+1)} \ . \tag{82}$$

Die 3 Funktionen sind in Abb. 7.1. neben den Werten des numerischen Experiments eingezeichnet; sie beschreiben die Realität hinreichend gut. Die Tab. 7.2. zeigt, daß die nach (80) berechnete gesamte Streubreite sich oberhalb eines Schwellwertes über die n-Achse erhebt und für große n nahezu symmetrisch wird, während bei kleinen n deutlich $\delta_{2,+} > \delta_{2,-}$ gilt. **Tab. 7.2.**:

n	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\pi_2(\eta_n)$	1,75	1,03	2,65	11,78	66,23	423,85	2943,39
$\pi_2(\eta_n)\,\delta_{2,+}$	11,19	2,14	4,01	15,68	82,32	505,23	3411,39
$\pi_2(\eta_n)\,\delta_{2,-}$	0,49	0,32	1,57	8,45	51,86	349,25	2510,71

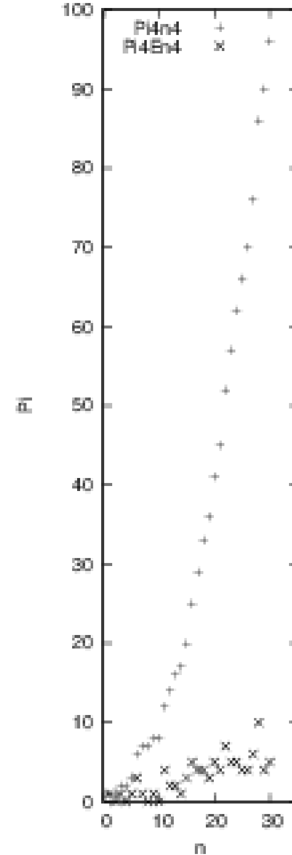
8 Primzahlvierlinge

Wegen der statistischen Unabhängigkeit aller Primzahlen voneinander sollte man annehmen, daß auch die Vierlingsmenge unendlich ist. Dem steht entgegen, daß es offenbar für kleinere Werte von n nur wenige Quadratintervalle gibt, die einen Vierling enthalten. Da nun die Vierlinge bezüglich ihrer Wahrscheinlichkeitsfunktion eine Menge der 4. Potenzordnung darstellen, seien in **Abb. 8.1.** die Anzahl der Vierlinge $\leq n^4$, $\pi_4(n^4)$, und die Vierlingsanzahl im Intervall $\eta_{4,n} := \left(n^4, (n+1)^4\right]$, $\pi_4(\eta_{4,n})$, über $n \leq 30$ dargestellt. Offensichtlich ist das Intervall $\eta_{4,10}$ das größte vierlingsfreie Intervall, im Intervall $\eta_{4,14}$ tritt letztmalig nur 1 Vierling auf. Diese Tatsache steht im Einklang mit unserem statistischen Ansatz, nach dem zur Intervallbreite $b_{4,n} = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$$\frac{\pi_4(\eta_{4,n})}{b_{4,n}} = \left(\frac{1,06}{2\ln(n+1)}\right)^4 \qquad (83)$$

als mittlere Primzahlvierlingsanzahl $\leq (n+1)^4$ zu erwarten ist.

Abb. 8.1. $\pi_4(n^4)$ und $\pi_4(\eta_{4,n})$



Satz 8.1. Da die Anzahl biquadrati-scher Intervalle mit mehr als 1 Vierling nach oben offen ist, muß es auch unendlich viele Primzahlvierlinge geben.

Der Satz bleibt hier als Vermutung stehen. Ob es ein n_0 gibt, sodaß $\forall n > n_0$ jedes Quadratintervall $\eta_{2,n}$ mindestens einen Primzahlvierling enthält, ist damit noch nicht

entschieden; es ist aber nahe gelegt. Ein solches n_0 müßte aber deutlich über $n = 1000$ liegen, denn oberhalb $n = 900$ gibt es noch primzahlvierlingsfreie Quadratintervalle. Unterhalb $n = 914$ gibt es insgesamt 96 Primzahlvierlinge.

9 Zur Goldbach-Hypothese

Christian Goldbach (1690-1764) vermutete in einem Brief an Leonhard Euler, daß jede gerade Zahl ≥ 6 als Summe aus genau 2 ungeraden Primzahlen dargestellt werden kann. Wir wollen sie in den etwas schärferen Satz fassen:

Satz 9.1. a) Jede gerade Zahl $2m \geq 8,\ m\epsilon\mathbb{N}$, kann als Summe aus genau 2 voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen dargestellt werden. Zusätzlich existiert $\forall$ Primzahlen p eine Darstellung $2m = 2p$.

b) Die Darstellung $2m = p_i + p_j,\ p_i \neq p_j$, ist im allgemeinen vieldeutig; eindeutig ist sie nur für einige relativ kleine Werte von $2m \leq 2m_0 = 12$, (wenn $p_i = p_j$ mit gewertet wird). Die Vielfachheit v_{2m} der Goldbachpaar-Darstellungen von 2m erfüllt

$$v_{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A'}{\ln\left(n+1\right)}\right)^2 \left(1 + \delta_2\right),\ 2m\epsilon\eta_n. \tag{84}$$

Bew.: Der Beweis soll auf probabilistischer Grundlage geführt werden. Das ist zulässig, da die Gültigkeit der Verteilungsfunktion $A'/\ln x$ für jedes Intervall $\left(1, x\right]$ aus seiner Gültigkeit $\forall\eta_n$ folgt, also bereits gezeigt ist, und alle Primzahlen als statistisch unabhängig erwiesen sind.

Die Summe aus 2 ungeraden Primzahlen

$$p_i + p_j = 2m \tag{85}$$

ist stets geradzahlig. Aus der Forderung $p_i \neq p_j$ folgt dann o.B.d.A. $p_i < p_j$ sowie die Existenz einer Zahl Δ , sodaß $p_i = m - \Delta$ und $p_j = m + \Delta$ gilt. Wir betrachten nun ein Quadratintervall $\eta_n = \left(n^2, (n+1)^2\right]$ mit $n \geq n_0$, sodaß auch noch jede gerade Zahl aus η_{n-1} oberhalb m und das Intervall $\eta'_{A,n} := \left(0, 4n\right]$ vollständig unterhalb m liegt. Die Breite b_A von $\eta'_{A,n}$ ist gleich der Summe der Breiten von η_{n-1} und η_n , also $b_A = (2n+1) + (2n-1) = 4n$. Daher gilt $n_0 = 7$. Für alle geraden Zahlen unterhalb dieser Größe prüfen wir Satz 9.1. explizit numerisch:

4=2+2; 6=3+3; 8=3+5; 10=3+7=5+5; 12=5+7; 14=3+11=7+7; 16=3+13=5+11; 18=5+13=7+11; 20=3+17=7+13; 22=3+19=5+17=11+11; 24=5+19=7+17=11+13; 26=3+23=7+19=13+13; 28=5+23=11+17; 30=7+23=11+19; 32=3+29=13+19; 34=3+31=5+29=11+23=17+17; 36=5+31=7+29=13+23=17+19.

Es sei hier bemerkt, daß in der Regel schon mindestens ein Goldbachpaar auftritt mit $p_j\epsilon\eta_n$, in einigen Fällen wird aber das erste Goldbachpaar erst mit $p_j\epsilon\eta_{n-1}$ gefunden. Für sehr große n kann nicht ausgeschlossen werden, daß das erste p_j, das ein Goldbachpaar bildet, noch kleiner ist. Das stört aber unsere Betrachtung nicht, da zur Bestimmung der Vielfachheit v der möglichen Goldbachpaar-Darstellungen alle p_j mit $m \leq p_j <$

$(n+1)^2$ zu berücksichtigen sind und hinreichend viele Quadratintervalle im Intervall $\left(m,(n+1)^2\right]$ existieren.

Die Wahrscheinlichkeit W_g, daß die erste Primzahl in (85) $p_i \epsilon \eta_{A,n}$ und die zweite $p_j \epsilon \eta_n$ erfüllt, ist durch das Produkt ihrer entsprechenden Wahrscheinlichkeiten definiert. Wegen

$$W_i = \frac{\pi\left(\eta_{A,n}\right)}{b_n} \approx 2\frac{\pi\left(\eta_n\right)}{b_n} = 2W_j \tag{86}$$

gilt für das Paar $\{p_i, p_j\}$

$$W_g = 2W_j^2. \tag{87}$$

Für die einzelne Zahl 2m haben wir wieder den streuenden Anteil zu verdoppeln, sodaß wir für die streuende Anzahl von Goldbachpaar-Darstellungen zahlenmäßig das Doppelte der Primzahlzwillingsanzahl in η_n gemäß (80) erhalten:

$$\upsilon_{2m} = \pi_g\left(2m\right) = 2\pi_{2,s}\left(\eta_n\right)\ , \tag{88}$$

wie in Satz 9.1.b behauptet wurde, wobei $\upsilon_{2m} = \pi_g\left(2m\right)$ gesetzt ist; **q.e.d.**

Beide Ausdrücke wachsen aber mit m über alle Schranken. Wegen des Faktors 2 erhebt sich jedoch die Funktion $\pi_g\left(2m\right)$ inclusive ihrem Streubereich schneller über die Anzahl “1” . Die **Abb. 9.1.** zeigt den Anfangsbereich von $\pi_g\left(2m\right)$ im numerischen Experiment zusammen mit den theoretisch ermittelten Werten für $2m \leq 330$.

Satz 9.2. Unter Goldbachpaaren versteht man im allgemeinen nur Paare ungerader Primzahlen, deren Summe eine gerade Zahl 2m ergibt. Läßt man auch die kleinste Primzahl $p_1 = 2$ als Paarpartner zu, so können auch alle ungeraden Zahlen, die um 2 größer sind als eine Primzahl, als Summe aus genau 2 Primzahlen dargestellt werden. Das sind zwar unendlich viele ungerade Zahlen, genau so viele wie es Primzahlen gibt, aber bei weitem nicht alle. Es gibt sogar unendlich viele Primzahlen, die als Summe aus genau einer ungeraden Primzahl und $p_1 = 2$ dargestellt werden können. Diese ungeraden Zahlen sind der kleinere Partner eines jeden Primzahlzwillings, von denen wir zeigen konnten, daß ihre Anzahl unendlich ist.

Satz 9.3. Die Zahl 5 ist die einzige ungerade unberührbare Zahl.
Man bezeichnet eine natürliche Zahl z als unberührbar, wenn es keine natürliche Zahl x gibt, deren echte Teilersumme $\sigma^*(x) = z$ ist.

Bew.: Behauptung und Beweis sind angelehnt an Aufgabe 48 b in [1], p. 327 und 336. Die Behauptung folgt aus dem Goldbachtheorem in der Fassung von Satz 9.1.a. Jede ungerade natürliche Zahl $z > 8$ hat eine Darstellung $z = 1 + 2n$ mit $2n \geq 8$. Jede gerade Zahl $2n \geq 8$ hat mindestens eine Darstellung $2n = p + q$ mit den Primzahlen $p \neq q$. Die Zahl $x = p \cdot q$ hat die Summe echter Teiler $\sigma^*(x) = 1 + p + q = 1 + 2n = z$. Die Zahlen $z = 3$ und $z = 7$ sind berührbar ($x = 4$ bzw. $x = 8$); q.e.d.

References

[1] H. Scheid, Zahlentheorie, Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wiss.-Verl., 1991

Danksagung

Für die Wartung und Systembetreuung meines PC danke ich Christian Schmidt-Gütter und für Unterstützung bei der Arbeit mit LaTeX und gnuplot Susanne Gütter.